

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică – informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\{x \in \mathbb{R} / (m^2 - 1)x + 2 > 0\} = \mathbb{R}$.
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care funcția este impară.
- 5p 3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} = 0$.
- 5p 4. Câte numere naturale de trei cifre au cel puțin o cifră impară?
- 5p 5. Fie $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari. Arătați că $|\vec{v}| = 2\sqrt{26}$.
- 5p 6. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ cu $\sin x = \frac{5}{13}$. Calculați $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL al-II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x considerăm matricele $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 5p a) Calculați $\det A(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați inversa matricei $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX - 1$ verifică $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1, |z_3| \geq 1$.
- 5p a) Calculați $z_1 z_2 z_3$.
- 5p b) Arătați că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$
- 5p c) Demonstrați că $a + b = 0$

SUBIECTUL al-III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
- 5p a) Arătați că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$.
- 5p c) Arătați că $-\frac{1}{2013} < f(2013) < -\frac{1}{2014}$.
2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{t^2 + 2} dt$.
- 5p a) Calculați $f(1)$.
- 5p b) Arătați că $f(x+2) + 2f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$.
- 5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = \frac{1}{3}$