

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

♦ Toate subiectele (I,II,III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

♦ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (1+i) \cdot (1-2 \cdot i) + 2 \cdot (1+i)$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^3 + 8 = 0$.
- 5p 3. Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{4 \cdot \pi}{3} + \cos \frac{7 \cdot \pi}{3}$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(-1, -3)$ la dreapta de ecuație $d: 3 \cdot x - 4 \cdot y - 4 = 0$.
- 5p 6. Să se determine lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AB = 2, AC = 4, m(\sphericalangle A) = 120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea

$$G = \{X \in M_3(\mathbb{R}) / A \cdot X = X \cdot A\}.$$

- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.
- 5p b) Să se demonstreze că $A^2 \cdot X = X \cdot A^2, (\forall) X \in M_3(\mathbb{R})$.
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci matricea $a \cdot I_3 + b \cdot A \in G$.

2. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = (X+1)^{100} + (X+2)^{100}$ și $g = X^2 + 3 \cdot X + 2$.

- 5p a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
- 5p b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu g .
- 5p c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la g .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

- 5p a) Să se demonstreze că funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \cdot f(x) = 0, (\forall) a \in \mathbb{R}$.

5p 2. Se consideră funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)}$.

- a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.
- b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.
- 5p c) Să se determine $a \in (1, e^2)$ pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox
- 5p și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = e^2$, să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.