Barem SIMULARE BACALAUREAT, 2013, M_mate-info

Pentru orice soluție corectă dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a puntajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

1	$\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2}{1-(3i)^2}+\frac{(1-3i)^2}{1-(3i)^2}=$ $=\frac{1+6i-9}{10}+\frac{1-6i-9}{10}=\frac{-16}{10}=-\frac{8}{5}$	3p 2p
2	$f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(2013)=2^0+2^1+2^2+.....+2^{2012}$ Termenii sumei sunt în progresie geometrică cu $b_1=2^0=1, q=2, n=2013$ $2^0+2^1+2^2+.....+2^{2012}=\frac{1(2^{2013}-1)}{2-1}=2^{2013}-1$	2p 1p 2p
3	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{3}^k=C_8^k 3^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2}\in N\Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ deci avem 5 termeni raţionali Dezvoltarea are 9 termeni, aşadar 4 termeni vor fi iraţionali	2p 2p 1p
4	Se impun condiţiile $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 5-x\geq\end{cases}\Rightarrow x\in[-1,5]$ Prin ridicare la puterea a 2-a ecuaţia devine $x+1=25-10x+x^2\Leftrightarrow x^2-11x+24=0$ care are soluţiile $x_1=3\in[-1,5]$ şi $x_2=8\notin[-1,5]$	2p 1p 2p
5	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-a+1)^2+(4+a-2)^2}$ $\sqrt{(5-a)^2+(2+a)^2}=5$ $25-10a+a^2+4+4a+a^2=25$ $2a^2-6a+4=0\Leftrightarrow a^2-3a+2=0$ $a_1=1$ şi $a_2=2$ soluţii	1p 1p 1p 1p 1p
6	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{25}$ Cum $\sin x<0$ pentru $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ obţinem $\sin x=-\frac{1}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL II

1 a)	$\det A = 0 - 2 + 2 + 0 + 0 + 0 =$ $= 0$	4p 1p
1 b)	$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ $A^2 + 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A\left(A^2 + 6I_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p 1p 2p
1 c)	$I_3 + xA^2 = \begin{pmatrix} 1-2x & 2x & 2x \\ 2x & 1-5x & x \\ 2x & x & 1-5x \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + xA^2) = (1-2x)(1-5x)^2 + 4x^3 + 4x^3 - 4x^2(1-5x) - x^2(1-2x) - 4x^2(1-5x) =$ $= 36x^2 - 12x + 1 = (6x-1)^2$ $\det(I_3 + xA^2) = (6x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in R$	2p 2p 1p
2 a)	$x, y \in (3,+\infty) \Rightarrow x - 3 > 0, y - 3 > 0$ $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12 = (x-3)(y-3) + 3 > 3 \Rightarrow x \circ y \in (3,+\infty)$	2p 3p
2 b)	$x \circ x = x \Rightarrow x^2 - 3x - 3x + 12 = x$ $\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$ Cu soluțiile $x_1 = 3$ și $x_2 = 4$	3p 2p
2 c)	Verificăm dacă $f(x+y) = f(x) \circ f(y)$ $f(x+y) = e^{x+y} + 3$ $f(x) \circ f(y) = (f(x)-3)(f(y)-3) + 3 = (e^x + 3 - 3)(e^y + 3 - 3) + 3 = e^x \cdot e^y + 3 = e^{x+y} + 3$ Așadar f morfism Fie $x_1, x_2 \in R$, din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} + 3 = e^{x_2} + 3 \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ deci f injectivă Din $f(x) = y \Rightarrow e^x + 3 = y \Rightarrow e^x = y - 3 \Rightarrow x = \ln(y-3) \in R$ pentru $y \in (3,+\infty)$ deci f surjectivă Așadar f bijectivă Cum f este morfism bijectiv rezultă că f este izomorfism de grupuri.	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

1 a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre ∞ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0}=(-\infty)\cdot\frac{1}{0_+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta spre $-\infty$	2p 1p 1p 1p
1 b)	$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$ $\begin{array}{cccccc} x & 0 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & +++++++++++++++++++++ & 0 & ---------------------- & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow & \end{array}$ $x=e$ punct de maxim	1p 1p 2p 1p
1 c)	$e<\pi$, cum f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$ $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln(e^{\pi})>\ln(\pi^{e})\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$	2p 3p
2 a)	$\int(x+f(x)-2)dx=\int\left(x+\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}-2\right)dx=\int\frac{x^3+4x-x^3+2x^2-5x+8-2x^2-8}{x^2+4}dx=$ $=\int\frac{-x}{x^2+4}dx=-\frac{1}{2}\int(x^2+4)'\cdot\frac{1}{x^2+4}dx=-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$	2p 3p
2 b)	Cum $x+f(x)-2=\frac{-x}{x^2+4}\Rightarrow f(x)=-x+2-\frac{x}{x^2+4}$ $\int f(x)dx=\int\left(-x+2-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$	2p 3p
2 c)	$g(x)=(x^2+4)f(x)=(x^2+4)\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}=-x^3+2x^2-5x+8$ $G(x)=\int g(x)dx=\int(-x^3+2x^2-5x+8)dx=-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+8x+C$ $G(1)=\frac{-1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+8+C=\frac{71}{12}+C$ $G(1)=-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{71}{12}+C=-\frac{1}{12}\Rightarrow C=-6$ deci $G(x)=-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+8x-6$	1p 2p 1p 1p