MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SUCEAVA

Examenul de bacalaureat 2013
Proba E. c)
Simulare 15.05.2013
Probă scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Fie z numărul din enunţ. Cum $\bar{z}=(1-i)^8+(1+i)^8=z$ rezultă că $z\in\mathbb{R}$, deci $\operatorname{Im} z=0$	**3p** **2p**
2.	Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[1;+\infty)$. $\sqrt{\pi}>\sqrt{3}>\sqrt{2}\ge 1 \Rightarrow f\left(\sqrt{\pi}\right)<f\left(\sqrt{3}\right)<f\left(\sqrt{2}\right)$	**2p** **3p**
3.	Ecuaţia dată se scrie $3^{2x}+3^x-2=0$. Notând $3^x=y$ obţinem ecuaţia $y^2+y-2=0$ cu soluţiile -2 şi 1. Cum $3^x>0$, convine doar $3^x=1$, deci $x=0$.	**1p** **2p** **2p**
4.	Cum $f(x)\in\{0,1,2,3\}$, $\forall x\in\{0,1,2,3\}$ şi $f(0)\cdot f(1)=0 \Rightarrow f(0)=0$ sau $f(1)=0$. Dacă $f(0)=0$, valorile $f(1)$, $f(2)$ şi $f(3)$ pot fi alese în 4^3 moduri. Dacă $f(1)=0$, valorile $f(0)$, $f(2)$ şi $f(3)$ pot fi alese în 4^3 moduri. Dacă $f(0)=f(1)=0$, valorile $f(2)$ şi $f(3)$ pot fi alese în 4^2 moduri Conform principiului includerii şi excluderii vor fi $4^3+4^3-4^2=112$ funcţii cu proprietatea din enunţ.	**1p** **2p** **2p**
5.	Triunghiul AOB este dreptunghic în O. Avem $AO=3$, $BO=4$, $AB=5$. Fie x distanţa de la O la dreapta AB. Atunci $AO\cdot OB=x\cdot AB \Rightarrow x=\dfrac{AO\cdot OB}{AB} \Rightarrow x=\dfrac{12}{5}$.	**2p** **3p**
6.	Avem $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$ $\sin 2\alpha=-\dfrac{8}{9}$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(m)=\begin{vmatrix} m^2 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \\ m & 1 & m^2 \end{vmatrix}=m^6-2m^3+1$ $\Delta(m)=0 \Leftrightarrow (m^3-1)^2=0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+m+1)=0 \Leftrightarrow m=1$	**2p** **3p**
b)	Pentru $m=-1$, determinantul matricei sistemului este $\Delta(-1)=4\neq 0$. Sistemul este omogen, deci are soluție unică $x=y=z=0$	**2p** **3p**

c)	Pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ avem $\Delta(m) \neq 0$, deci sistemul admite doar soluția nulă $(0,0,0)$. Pentru $m = 1$, sistemul devine $x + y + z = 0$. Dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluție a sistemului cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive, rezultă $0 = x_0 + y_0 + z_0 > 0$, absurd !	2p 1p 2p
2.a)	$S = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \ldots + \widehat{23} + \widehat{24} =$ $= \left(\hat{1} + \widehat{24}\right) + \left(\hat{2} + \widehat{23}\right) + \ldots + \left(\widehat{12} + \widehat{13}\right) = \hat{0}$	1p 4p
b)	$P = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \widehat{23} \cdot \widehat{24} =$ $= \left(\hat{5} \cdot \widehat{10}\right) \cdot \left(\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7} \cdot \hat{8} \cdot \hat{9} \cdot \widehat{11} \cdot \widehat{12} \cdot \ldots \cdot \widehat{23} \cdot \widehat{24}\right) = \hat{0}$	1p 4p
c)	$\hat{a}$ inversabil în $\mathbb{Z}_{25} \Leftrightarrow (a, 25) = 1$ Elementele neinversabile sunt $\hat{0}$, $\hat{5}$, $\widehat{10}$, $\widehat{15}$, $\widehat{20}$ $\mathbb{Z}_{25}$ conține $25 - 5 = 20$ elemente inversabile.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f_n'(x) = nx^{n-1} - n$ $f_n'(1) = n - n = 0$	3p 2p
b)	$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(1) = 2 - n < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ Șirul lui Rolle este $+-+$, deci ecuația $f_n(x) = 0$ are exact două soluții $a_n \in (0,1)$ și $b_n \in (1, +\infty)$	1p 2p 2p
c)	f_n este continuă și $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0 \Rightarrow a_n \in \left(0, \frac{2}{n}\right)$ Cum $0 < a_n < \frac{2}{n}, \forall n \geq 3$ și $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, din teorema cleștelui rezultă $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$	3p 2p
2.a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)' \, dx = = -x \cos x \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx =$ $= 0 + \sin x \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	3p 2p
b)	$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}(-\cos x)' \, dx = = -x^{n+1} \cos x \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$ $\frac{1}{n+1} I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n (\sin x)' \, dx = x^n \sin x \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}$	2p 3p
c)	$\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $x^n \sin x \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$ $\forall x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $\sin x \geq \sin 1 \Rightarrow x^n \sin x \geq x^n \sin 1 \Rightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \geq \sin 1 \cdot \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^n \, dx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n \geq \sin 1 \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big\|_1^{\frac{\pi}{2}} = \sin 1 \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right)$ (1) Cu teorema Stolz-Cesaro avem	1p 1p 1p

	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+2-n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=+\infty$	**1p**
	Cum $\sin 1>0$ avem $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin 1\cdot\left(\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=+\infty$	**1p**
	Folosind teorema cleștelui în relația (1) rezultă $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.	

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.