

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 puncte)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_2 \frac{12}{5} - \log_2 3 + \log_2 5$.
- 5p 2. Să se determine valorile reale ale lui m , știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - mx - m - 6 = 0$ verifică relația $4(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0$.
- 5p 3. Să se rezolve ecuația $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$.
4. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 6 elemente.
- 5p 5. Se calculeze distanța de la punctul $A(0,3)$ la dreapta $d: 4x - 3y - 1 = 0$.
- 5p 6. Să se determine lungimea segmentului BC în triunghiul ABC , știind că $AC = 6$, $AB = 4$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases} \quad \text{unde } a \in \mathbb{R}$$
- 5p a) Pentru $a = 1$ se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p b) Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.
2. În mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
- 5p a) Să se verifice dacă $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale ecuația, $x \circ x = 11$.
- 5p c) Știind că operația " \circ " este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2013}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2$
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p b) Să se arate că f este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p c) Să se arate că funcția f nu admite asimptote spre $+\infty$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$
- 5p a) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(1, +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\int (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.
- 5p c) Să se determine primitiva G a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ cu proprietatea că $G(1) = \frac{1}{2}$.