SIMULARE BACALAUREAT, 2013, M_tehnologic

Pentru orice soluție corectă dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a puntajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 puncte)

1	$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2$ $\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1-2\sqrt{2}+2$ $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=6\in N$	2p 2p 1p
2	$f(1)=2+1=3$, $f(2)=2+2=4$, ..., $f(20)=2+20=22$ $f(1)+f(2)+....+f(20)=3+4+.......+22$ $3+4+.......+22=\frac{22(22+1)}{2}-1-2=11\cdot 23-3=250$ (sau noţiuni legate de progresia aritmetică)	2p 1p 2p
3	$C_x^2=\frac{x!}{2!(x-2)!}=\frac{(x-2)!(x-1)x}{2(x-2)!}=\frac{x^2-x}{2}$ $C_x^2=21\Leftrightarrow\frac{x^2-x}{2}=21$ $x^2-x-42=0$ cu soluţiile $x_1=-6\notin N$ şi $x_2=7\in N, x_2\geq 2$	2p 1p 2p
4	4 cazuri posibile înlocuirea celor 4 valori şi stabilirea valorii de adevăr 2 cazuri favorabile $P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	1p 2p 1p 1p
5	A,B,C coliniare $\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&6&1\\m&3&1\\5&0&1\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}-1&6&1\\m&3&1\\5&0&1\end{vmatrix}=-6m+12$ $-6m+12=0\Rightarrow m=2$	1p 3p 1p
6	$\sin 65^\circ=\sin\left(90^\circ-25^\circ\right)=\cos 25^\circ$ $\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ=\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ=1$	3p 2p

SUBIECTUL II (30 puncte)

1 a)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 4\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 2 + (-2)(-1) & (-1)\cdot 4 + (-2)(-2) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-4 & 8-8 \\ -2+2 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = O_2$	1p 2p 2p
1 b)	$B = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^*$ $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$ $B^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1}$	1p 1p 1p 2p
1 c)	$B^2 = B \cdot B = (I_2 + A)(I_2 + A) = I_2 + A + A + A^2 = I_2 + 2A$ sau calcul Cum $B^2 = I_2 + xA$ obținem $I_2 + xA = I_2 + 2A$ de unde $x = 2$	3p 2p
2 a)	$x \circ y = xy - 2012(x+y) + 2012\cdot 2013 = xy - 2012x - 2012y + 2012\cdot 2012 + 2012 =$ $= x(y-2012) - 2012(y-2012) + 2012 =$ $= (x-2012)(y-2012) + 2012$	2p 2p 1p
2 b)	$\exists e \in R$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in R$ $x \circ e = (x-2012)(e-2012) + 2012 \Rightarrow (x-2012)(e-2012) + 2012 = x$ $(x-2012)(e-2012) + 2012 = x \Rightarrow (x-2012)(e-2013) = 0$ $e - 2013 = 0 \Rightarrow e = 2013$	1p 2p 1p 1p
2 c)	Se observă că $x \circ 2012 = (x-2012)(2012-2012) + 2012 = 2012$ Luăm $x = 1 \circ 2 \circ .... \circ 2011 \circ 2013$ Folosind faptul că operația este asociativă $1 \circ 2 \circ 3 \circ .... \circ 2012 \circ 2013 = x \circ 2012 = 2012$	2p 2p 1p

SUBIECTUL III (30 puncte)

1 a)	$f'(x)=(e^x-x)'=\left(e^x\right)'-x'=e^x-1$ $f'(x)-f(x)=\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x\right)=e^x-1-e^x+x$ deci $f'(x)-f(x)=x-1$	2p 2p 1p
1 b)	$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ $f(0)=e^0-0=1$ $f'(0)=e^0-1=1-1=0$ $y-1=0\cdot(x-0)=0\Rightarrow y=1$	1p 1p 1p 2p
1 c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=e^{-\infty}-(-\infty)=$ $=\dfrac{1}{e^{\infty}}+\infty=$ $=0+\infty=+\infty$	1p 2p 1p 1p
2 a)	Dacă $F:[0,1]\to R$ este o primitivă a lui $f:[0,1]\to R$ atunci F este derivabilă pe $[0,1]$ şi $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[0,1]$ $F'(x)=f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$ deci F este crescătoare pe $[0,1]$	2p 3p
2 b)	$\int(x+1)f(x)dx=\int(x+1)\dfrac{x^2}{x+1}dx=$ $=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$	2p 3p
2 c)	$G(x)=\int g(x)dx=\int\dfrac{f(x)}{x^2}dx=\int\dfrac{\frac{x^2}{x+1}}{x^2}dx=\int\dfrac{1}{x+1}dx=\ln\|x+1\|+C$ $G(1)=\ln\|1+1\|+C=\ln\|2\|+C=\ln 2+C$ $\ln 2+C=2\ln 2\Rightarrow C=\ln 2$ Deci $G(x)=\ln(x+1)+\ln 2$ pentru $x\in(0,1]$	2p 1p 1p 1p